Face Amount or Reserve if Greater

INAUGURALDISSERTATION

zur Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie
vorgelegt der
Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von
GERTRUD WIRZ
aus Freiburg (Deutschland)

Verlag Herbert Lang & Cie AG Bern
1970

Gertrud Wirz

Face Amount
or Reserve if Greater

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546021_0003

Face Amount or Reserve if Greater

INAUGURALDISSERTATION

zur Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie
vorgelegt der
Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von
GERTRUD WIRZ
aus Freiburg (Deutschland)

Verlag Herbert Lang & Cie AG Bern
1970

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. E. Zwinggi und Dr. P. Leepin.

Basel, den 26. Mai 1970 Prof. Dr. Silvio Fallab, Dekan

Diese Arbeit erscheint ebenfalls in der Reihe Volks- und Betriebswirtschaft der Europäischen Hochschulschriften Bd. 24 (Verlag Herbert Lang & Cie AG, Bern).

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

© Herbert Lang & Cie AG Bern, 1970. Alle Rechte vorbehalten.

Nachdruck oder Vervielfältigung auch auszugsweise in allen Formen wie Mikrofilm, Xerographie, Mikrofiche, Mikrocard, Offset verboten.

Druck: Lang Druck AG, Liebefeld/Bern (Schweiz)

INHALTSVERZEICHNIS

A. EINLEITUNG ..... S. 4
B. PROBLEMSTELLUNG ..... S. 6
C. THEORIE VON CANTELLI ..... S. 7
D. LOESUNG DES PROBLEMS ..... S. 11
I. Teil. Eine Ausscheideursache
1. Formel für die Nettoprämie ..... S. 11
2. Kriterium für a ..... S. 12
3. Beispiel ..... S. 16
4. Tarifprämie ..... S. 17
II. Teil. Zwei Ausscheideursachen
1. Formel für die Nettoprämie ..... S. 19
2. Kriterien für a und b ..... S. 22
3. Tarifprämie ..... S. 27
E. ZUSAMMENFASSUNG ..... S. 29
LITERATURVERZEICHNIS ..... S. 32

A. EINLEITUNG

Im allgemeinen ist bei einer gemischten Versicherung im Erlebensfall die gleiche Leistung vorgesehen wie bei vorzeitigem Tod. In den Vereinigten Staaten hat sich jedoch schon seit einigen Jahrzehnten eine besondere Form der gemischten Versicherung eingebürgert, welche im Erlebensfall eine grössere Leistung als im Todesfall gewährt. Entstanden ist diese Variante aus der Kombination einer temporären Todesfallversicherung mit einer aufgeschobenen, lebenslänglichen Altersrente (Dauer der Todesfallversicherung gleich Aufschubszeit der Rente). Diese hatte oft eine derartige Höhe, dass ihr Barwert zu Beginn ihrer Laufzeit die Todesfallsumme um einiges überstieg. Bei der sogenannten "$ 10-a-month income per $ 1.000 face amount"- Police z.B. (unter diesem Namen wurde die Versicherungsform populär) übertraf der im Alter 65 gebräuchliche Rentenbarwert die Todesfalleistung um ungefähr ein Drittel [1]*). Man ersetzte nun die Altersrente durch ihren Kapitalwert und liess diesen alle Werte annehmen, welche die Todesfallsumme um k (k beliebig, aber grösser null) überstiegen.

Bei jeder so gearteten Versicherungsform existiert ein Zeitpunkt, in dem das angesammelte Deckungskapital den Wert der Versicherungssumme (= Todesfallkapital) erreicht. Stirbt der Versicherte nach diesem Termin, jedoch noch während der Versicherungsdauer, wäre es vom technischen Gesichtspunkt aus ungerecht, auch dann nur die Versicherungssumme auszuzahlen. So hat man versucht, eine andere Lösung zu finden. Dabei hat unter anderem E. G. Fassel [2] den Fall behandelt, dass bei Tod die Versicherungssumme bzw. das Deckungskapital, je nachdem welcher Wert grösser ist, fällig wird, und ihm den Namen "Face Amount or Reserve if Greater" gegeben.

Da wir uns im folgenden mit einer allgemeineren Variante dieser Versi-

---

*) Die Ziffern in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis im Anhang.

cherungsform befassen werden, wollen wir hier die Ergebnisse von Fassel kurz angeben.

Wir gehen aus von einer Versicherung der Dauer n und der Summe "1", abgeschlossen im Alter x. Stirbt der Versicherte vorzeitig, werde die Summe "1" bzw. das Deckungskapital ${}_{t+1}V_x$, falls grösser 1, geleistet. Erlebt er jedoch den Ablaufstermin n, erhalte er die Summe "1+k", $k > o$. Alle Versicherungsleistungen seien am Ende des Jahres, in dem das versicherte Ereignis eintritt, zahlbar vorausgesetzt.

Unter diesen Annahmen gelangt Fassel zu folgendem Ausdruck für die jährliche Nettoprämie:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a} \cdot (1+k) v^{n-a}}{N_x - N_{x+a} + D_{x+a} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-a}|}}$$

. a bedeutet dabei die grösste ganze Zahl, für die ${}_{t+1}V_x \leq 1$ ist, dh. a bezeichnet die Anzahl Jahre, während derer das Todesfallkapital konstant gleich der Versicherungssumme ist.

Für a hat Fassel das nachstehende Kriterium aufgestellt:
a ist die grösste ganze Zahl, für die

$$\ddot{a}_{x:\overline{a}|} \leq \frac{(1+i)\ddot{s}_{\overline{n-a}|}}{k} \text{ ist.}$$

B. PROBLEMSTELLUNG

Wir betrachten eine Versicherung der Dauer n und der Summe "1". Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

1. Es existiere nur eine Ausscheideursache α (Tod).
   Dann sieht der Leistungsplan folgendermassen aus:
   Gehört der Versicherte im Zeitpunkt n noch der Versichertengemeinschaft an, erhält er die Summe "1+k", $k>o$, scheidet er jedoch vorzeitig aus, soll der Betrag "1" bzw. $\alpha_t \cdot {}_{t+1}V_x$, je nachdem welcher der beiden Werte grösser ist, fällig werden.
   ${}_{t+1}V_x$ bezeichnet das Nettodeckungskapital unserer Versicherungsform, α_t ist ein zeitabhängiger Faktor, der die beiden Bedingungen

   $0 < \alpha_t \leqslant 1$ für $t < n$ und $\alpha_t = 1$ für $t = n$ erfüllt.

   Setzt man $\alpha_t \equiv 1$, ergibt sich der von Fassel untersuchte Fall.

2. Allgemeinere Variante:
   Es seien zwei Ausscheideursachen α und β vorhanden.
   Dann sind folgende Leistungen vorgesehen:
   Verbleibt der Versicherte bis zum Ende der Versicherung in der Gesamtheit, wird ihm wie oben die Summe "1+k" ausbezahlt. Tritt er aber vorzeitig aus dem Grund $\alpha(\beta)$ aus, werde die Summe "1" bzw, $\alpha_t \cdot {}_{t+1}V_x$ ($\beta_t \cdot {}_{t+1}V_x$), falls grösser 1, geleistet.

In beiden Fällen sollen nun die jährliche Nettoprämie und die jährliche Tarifprämie bestimmt werden, die wir beide der Einfachheit halber als zeitlich konstant annehmen. Zur Lösung des Problems benützen wir die Theorie von Cantelli, der wir daher ein eigenes Kapitel widmen wollen.

C. THEORIE VON CANTELLI

In der Literatur wird unter der Theorie von Cantelli der Fundamentalsatz der Cantelli'schen Kapitalansammlungstheorie verstanden. Zu seiner Herleitung geht man aus von der kontinuierlichen Abfallsordnung eines geschlossenen Bestandes:

$$l_{x+t} = l_x \cdot e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{h} \mu_{x+\tau}^{(i)} d\tau}$$

, wobei l_x den Anfangsbestand an x- Jährigen und $\mu_{x+t}^{(i)}$ die Ausscheideintensität der i-ten Ursache (i = 1,2,...,h) bedeuten.

Die Mitglieder sollen in der Zeitspanne dt einen Beitrag entrichten, dessen jeweilige Höhe durch die Funktion P_{x+t} gegeben sei. Beim Ausscheiden infolge der Ursache i werde die Leistung $\alpha_{x+t}^{(i)} \cdot {}_tV_x$ fällig. Wir erhalten so folgende Differentialgleichung für das Deckungskapital:

$$\frac{d_tV_x}{dt} = (\delta + \sum_{i=1}^{h} \mu_{x+t}^{(i)}) \cdot {}_tV_x + P_{x+t} - \sum_{i=1}^{h} \mu_{x+t}^{(i)} \cdot \alpha_{x+t}^{(i)} \cdot {}_tV_x \qquad \text{oder}$$

$$\frac{d_tV_x}{dt} = (\delta + \sum_{i=1}^{h} (1-\alpha_{x+t}^{(i)}) \mu_{x+t}^{(i)}) \cdot {}_tV_x + P_{x+t} \cdot$$

Integrieren wir diese Gleichung nach t und setzen die Integrationskonstante ${}_0V_x = 0$, folgt:

$$ {}_tV_x = e^{\int_0^t \delta + \sum_{i=1}^{h} (1-\alpha_{x+\tau}^{(i)})\mu_{x+\tau}^{(i)} d\tau} \cdot \int_0^t P_{x+\varrho} \cdot e^{-\int_0^{\varrho} \delta + \sum_{i=1}^{h} (1-\alpha_{x+\tau}^{(i)})\mu_{x+\tau}^{(i)} d\tau} \, d\varrho $$

oder $$ {}_tV_x = \int_0^t P_{x+\varrho} \cdot e^{\int_{\varrho}^{t} \delta + \sum_{i=1}^{h} \mu_{x+\tau}^{(i)} \cdot (1-\alpha_{x+\tau}^{(i)}) d\tau} \, d\varrho . $$

Setzen wir noch nach Frauenfelder [4]

$$ \sum_{i=o}^{h} \mu_{x+t}^{(i)} = \mu_t \quad \text{und} \quad \sum_{i=o}^{h} \mu_{x+t}^{(i)} \cdot \alpha_{x+t}^{(i)} = \mu_t \cdot \alpha_t , \text{ wobei } \mu_{x+t}^{(o)} \equiv \delta \text{ und } \alpha_{x+t}^{(o)} \equiv o $$

sein soll, erhalten wir schliesslich:

$$ {}_tV_x = \int_0^t P_{x+\varrho} \cdot e^{\int_{\varrho}^{t} (\mu_\tau - \mu_\tau \cdot \alpha_\tau) d\tau} \, d\varrho . $$

Aus dieser Gleichung ergibt sich sofort der Fundamentalsatz der Cantelli'schen Kapitalansammlungstheorie:

Satz 1: Stimmen zwei Versicherungsformen bei gleicher Prämie und gleichem Anfangsdeckungskapital in dem Ausdruck $\mu_t \cdot \alpha_t - \mu_t$ überein, so besitzen sie auch gleiches Deckungskapital.

Aus der Bedingung, dass $\bar{\mu}_t \cdot \bar{\alpha}_t - \bar{\mu}_t$ gleich $\mu_t \cdot \alpha_t - \mu_t$ sein muss, damit das Deckungskapital unverändert bleibt, folgt noch eine andere, etwas speziellere Formulierung des Satzes:

Satz 2: Das Deckungskapital einer Versicherung mit Leistungen $Q^{(i)}_{x+t} = \alpha^{(i)}_{x+t} \cdot {}_tV_x$ $(i = 1,2,\ldots,h)$ und Ausscheideintensitäten $\mu^{(i)}_{x+t}$ ändert sich nicht, wenn man die Leistungen durch $\bar{Q}^{(i)}_{x+t} = 0$ und die Intensitäten durch $\bar{\mu}^{(i)}_{x+t} = (1-\alpha^{(i)}_{x+t})\mu^{(i)}_{x+t}$ ersetzt.

Ein entsprechender Satz gilt auch dann, wenn man sich der diskontinuierlichen Methode bedient. Da wir ihn bei unseren Herleitungen mehrmals benötigen, soll er hier - unter etwas einschränkenderen Voraussetzungen - kurz hergeleitet werden. (Eine allgemeinere Ableitung hat Henryk Schärf unter Verwendung von Summendarstellungen gegeben.[5])

Wir gehen aus von der allgemeinen Rekursionsformel für das Deckungskapital

$$({}_tV_x + P_{x+t})(1+i) - \sum_{i=1}^{h} {}^*q^{(i)}_{x+t} \cdot Q^{(i)}_{x+t} = p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x. \qquad (1)$$

Nehmen wir P_{x+t} als zeitlich konstant an und berücksichtigen, dass

${}_tq_x = \sum_{i=1}^{h} {}^*q^{(i)}_{t\,x}$ ist, können wir (1) auch schreiben: $\Delta\, {}_tV_x =$

$$= {}_{t+1}V_x - {}_tV_x = i({}_tV_x + P_x) + P_x + \sum_{i=1}^{h} {}^*q^{(i)}_{x+t} \cdot ({}_{t+1}V_x - Q^{(i)}_{x+t}). \qquad (2)$$

Verlangen wir nun, dass die Leistungen dem Deckungskapital proportional sind, dh. setzen wir

$Q^{(i)}_{x+t} = \alpha^{(i)}_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x$, folgt:

$$\Delta\,{}_tV_x = i({}_tV_x + P_x) + P_x + \sum_{i=1}^{h} {}^*q^{(i)}_{x+t} \cdot (1 - \alpha^{(i)}_{x+t}) \cdot {}_{t+1}V_x .$$

Bezeichnen wir mit ${}^*\bar{q}^{(i)}_{x+t}$ den Ausdruck ${}^*q^{(i)}_{x+t} \cdot (1 - \alpha^{(i)}_{x+t})$, so erhalten wir schliesslich:

$$\Delta\,{}_tV_x = i({}_tV_x + P_x) + P_x + \sum_{i=1}^{h} {}^*\bar{q}^{(i)}_{x+t} \cdot ({}_{t+1}V_x - 0). \qquad (3)$$

Vergleicht man (2) und (3) miteinander, so erkennt man sofort, dass der nachstehende Satz gilt:

Satz 3: Ersetzt man bei einer Versicherung mit zeitlich konstanter Prämie die Leistungen $Q^{(i)}_{x+t} = \alpha^{(i)}_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x$ durch $\bar{Q}^{(i)}_{x+t} = 0$ und die Ausscheidewahrscheinlichkeiten ${}^*q^{(i)}_{x+t}$ durch ${}^*\bar{q}^{(i)}_{x+t} = (1 - \alpha^{(i)}_{x+t}) \cdot {}^*q^{(i)}_{x+t}$, bleibt das Deckungskapital ungeändert.

D. LOESUNG DES PROBLEMS

I. Teil. Eine Ausscheideursache

1. Formel für die Nettoprämie

Wir teilen die Versicherungsdauer n in zwei Abschnitte ein, in die Intervalle $0 \leq t < a$ und $a \leq t \leq n$. Dabei sei a derart bestimmt, dass für alle $t \geq a$ $\alpha_t \cdot {}_{t+1}V_x \geq 1$ ist. Somit wird, wenn der Versicherte im Zeitraum von 0 bis a ausscheidet, die Summe "1", im Intervall von a bis n dagegen die Summe $\alpha_t \cdot {}_{t+1}V_x$ ausbezahlt.

Damit gelten folgende Rekursionsformeln für das Deckungskapital:

für $t < a$: $({}_tV_x + P_x)(1+i) - q_{x+t} - (1 - q_{x+t}) \cdot {}_{t+1}V_x = 0$ und für

$t \geq a$: $({}_tV_x + P_x)(1+i) - q_{x+t} \cdot \alpha_t \cdot {}_{t+1}V_x - (1 - q_{x+t}) \cdot {}_{t+1}V_x = 0.$

Setzen wir hierin $(1 - \alpha_t)q_{x+t} = \bar{q}_{x+t}$, so folgt nach Satz 3 (Kap. C):

$$({}_tV_x + P_x)(1+i) = (1 - \bar{q}_{x+t}) \cdot {}_{t+1}V_x \cdot \qquad (4)$$

Dies ist aber die Rekursionsformel des Deckungskapitals einer reinen Erlebensfallversicherung. Daraus erhält man für das prospektive Deckungskapital:

$${}_tV_x = (1+k)v^{n-t} \cdot {}_{n-t}\bar{p}_{x+t} - P_x \cdot \bar{\ddot{a}}_{x+t:n-t} \; *).$$

---

*) Die Balken über den einzelnen Grössen weisen darauf hin, dass diese mit der Wahrscheinlichkeit $\bar{q}_x$ zu berechnen sind.

Für ${}_aV_x$ resultiert dann:

$$ {}_aV_x = (1+k)v^{n-a} \cdot {}_{n-a}\bar{p}_{x+a} - P_x \cdot \bar{a}_{x+a:\overline{n-a}|} \cdot \qquad (5) $$

Gleichzeitig gilt aber auch die Formel für das retrospektive Deckungskapital, so dass wir für ${}_aV_x$ noch folgenden Ausdruck erhalten:

$$ {}_aV_x = \frac{P_x \cdot (N_x - N_{x+a}) - (M_x - M_{x+a})}{D_{x+a}} \cdot \qquad (6) $$

Aus der Gleichsetzung von (5) und (6) ergibt sich für die Nettoprämie P_x:

$$ P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + (1+k)v^{n-a} \cdot {}_{n-a}\bar{p}_{x+a} \cdot D_{x+a}}{N_x - N_{x+a} + D_{x+a} \cdot \bar{a}_{x+a:\overline{n-a}|}} \cdot \qquad (7) $$

Definieren wir ${}_tp'_x$ derart, dass

${}_tp'_x = {}_tp_x$ für alle $t \leq a$ und

${}_tp'_x = {}_ap_x \cdot {}_{t-a}\bar{p}_{x+a}$ für $t > a$ und setzen entsprechend

$D'_{x+t} = v^{x+t} \cdot l_x \cdot {}_tp'_x$ etc., so lässt sich (7) vereinfachen auf

$$ P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + (1+k)D'_{x+n}}{D'_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \cdot \qquad (8) $$

In dieser Formel ist ausser P_x nur noch a unbekannt.

2. Kriterium für a.

Um a zu ermitteln, lösen wir (6) nach P_x auf:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a} \cdot {}_aV_x}{N_x - N_{x+a}} \quad . \qquad (9)$$

Erweitern wir mit α_{a-1} und berücksichtigen, dass $\alpha_{a-1} \cdot {}_aV_x < 1$ ist, resultiert folgende Ungleichung:

$$P_x < \frac{M_x - M_{x+a}}{N_x - N_{x+a}} + \frac{D_{x+a}}{\alpha_{a-1} \cdot (N_x - N_{x+a})} \quad . \qquad (10)$$

Das erste Glied der rechten Seite stellt die Prämie einer temporären Todesfallversicherung über die Summe "1" dar, das zweite Glied die Prämie einer Erlebensfallversicherung über die Summe $1/\alpha_{a-1}$. Wir bezeichnen diese Prämien mit den Symbolen $P({}_{|a}A_x)$ bzw. $(1/\alpha_{a-1}) \cdot P({}_aE_x)$ und können so anstelle von (10) auch schreiben:

$$P_x < P({}_{|a}A_x) + \frac{1}{\alpha_{a-1}} \cdot P({}_aE_x). \qquad (11)$$

Ersetzen wir in (9) ${}_aV_x$ mit Hilfe von Gleichung (4), bekommen wir:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a} \cdot (v \cdot {}_{a+1}V_x \cdot (1 - \bar{q}_{x+a}) - P_x)}{N_x - N_{x+a}} \quad .$$

Nach P_x aufgelöst, ergibt das:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a} \cdot v(1 - \bar{q}_{x+a}) \cdot {}_{a+1}V_x}{N_x - N_{x+a} + D_{x+a}} \quad .$$

Nun ist $(1 - \bar{q}_{x+t}) = (1 - \alpha_t)p_{x+t} + \alpha_t$, somit wird

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a} \cdot v(p_{x+a} \cdot (1 - \alpha_a) + \alpha_a) \cdot {}_{a+1}V_x}{N_x - N_{x+a+1}} \quad .$$

Weiterhin gilt: $D_{x+a} \cdot v \cdot p_{x+a} = D_{x+a+1}$,

$v \cdot D_{x+a} - D_{x+a+1} = C_{x+a}$ und

$\alpha_a \cdot {}_{a+1}V_x \geq 1$,

so dass wir schliesslich erhalten:

$$P_x \geq \frac{M_x - M_{x+a+1}}{N_x - N_{x+a+1}} + \frac{D_{x+a+1}}{(N_x - N_{x+a+1}) \cdot \alpha_a} \quad . \qquad (12)$$

Hier stellt wiederum das erste Glied der rechten Seite die Prämie einer temporären Todesfallversicherung über die Summe "1", das zweite Glied die Prämie einer Erlebensfallversicherung über die Summe $1/\alpha_a$ dar, so dass man für (12) analog (11) auch schreiben kann:

$P_x \geq P({}_{a+1}A_x) + \frac{1}{\alpha_a} \cdot P({}_{a+1}E_x)$. Mit (11) zusammen ergibt sich dann:

$$P({}_{a}A_x) + \frac{1}{\alpha_{a-1}} \cdot P({}_{a}E_x) > P_x \geq P({}_{a+1}A_x) + \frac{1}{\alpha_a} \cdot P({}_{a+1}E_x), \qquad (13)$$

wobei a die grösste ganze Zahl ist, für die (13) noch gilt.

Diese Ungleichung ist leicht zu interpretieren:
Das Deckungskapital unserer Versicherungsform ist nach a Jahren kleiner $1/\alpha_{a-1}$, demnach muss auch unsere Prämie kleiner sein als diejenige einer gemischten Versicherung der Dauer a mit einer Erlebensfalleistung von $1/\alpha_{a-1}$. Andererseits ist unser Deckungskapital nach a Jahren grösser oder gleich $1/\alpha_a$, infolgedessen muss auch unsere Prämie grösser oder gleich der Prämie einer gemischten Versicherung der Dauer

a+1 sein, welche im Erlebensfall die Summe $1/\alpha_a$ vorsieht.

Obwohl Ungleichung (13) viel zum Verständnis beiträgt, kann man sie zur Bestimmung von a jedoch nur dann mit Vorteil heranziehen, wenn die vorkommenden Grössen schon tabelliert sind. Wir wollen daher noch eine weitere Beziehung zur Ermittlung von a herleiten.

Wir lösen Gleichung (5) nach P_x auf:

$$P_x = \frac{(1+k)v^{n-a} \cdot {}_{n-a}\bar{p}_{x+a} - {}_aV_x}{\bar{a}_{x+a:\overline{n-a}|}} = \frac{(1+k)D'_{x+n} - D'_{x+a} \cdot {}_aV_x}{D'_{x+a} \cdot \ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|}} .$$

Erweitern wir mit α_{a-1} und berücksichtigen, dass $\alpha_{a-1} \cdot {}_aV_x < 1$ ist, folgt:

$$P_x > \frac{\alpha_{a-1} \cdot (1+k)D'_{x+n} - D'_{x+a}}{\alpha_{a-1} \cdot D'_{x+a} \cdot \ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|}} .$$

Setzen wir hierin für P_x den Wert von Gleichung (8) ein, erhalten wir:

$$\frac{M_x - M_{x+a} + (1+k)D'_{x+n}}{D'_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} > \frac{\alpha_{a-1} \cdot (1+k)D'_{x+n} - D'_{x+a}}{\alpha_{a-1} \cdot D'_{x+a} \cdot \ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{M_x - M_{x+a} + (D'_{x+n} \cdot (1+k) - D'_{x+a}/\alpha_{a-1}) + D'_{x+a}/\alpha_{a-1}}{\alpha_{a-1} \cdot (D'_{x+n} \cdot (1+k) - D'_{x+a}/\alpha_{a-1})} \gtrless$$

$$\frac{D'_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{a}|} + D'_{x+a} \cdot \ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|}}{\alpha_{a-1} \cdot D'_{x+a} \cdot \ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|}} ,$$

je nachdem ob $\alpha_{a-1} \cdot (1+k)D'_{x+n} - D'_{x+a} \gtrless 0$ ist.

Somit wird, da $D'_{x+a} = D_{x+a}$ und $D'_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{a}|} = D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}$,

$$\frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a} / \alpha_{a-1}}{D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}} > \frac{\alpha_{a-1} \cdot (1+k) D'_{x+n} - D'_{x+a}}{\alpha_{a-1} \cdot D'_{x+a} \cdot \ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|}} \quad . \qquad (14)$$

Nun ist $\frac{(M_x - M_{x+a}) + D_{x+a} / \alpha_{a-1}}{D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}} = \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a}}{D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}} + \frac{(\frac{1}{\alpha_{a-1}} - 1) D_{x+a}}{D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}}$

$$= (\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{a}|}} - d) + \frac{(1 - \alpha_{a-1}) D_{x+a}}{\alpha_{a-1} \cdot D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}} = \frac{(1 - \alpha_{a-1}) D_{x+a} + \alpha_{a-1} \cdot D_x}{\alpha_{a-1} \cdot D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}} - d.$$

(14) wird somit zu:

$$\frac{\alpha_{a-1} \cdot (1+k) D'_{x+n} - D'_{x+a}}{D'_{x+a} \cdot \ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|}} < \frac{(1 - \alpha_{a-1}) D'_{x+a} + \alpha_{a-1} \cdot D'_x}{D'_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{a}|}} - \alpha_{a-1} \cdot d, \qquad (15)$$

wobei a die grösste ganze Zahl ist, die (15) erfüllt.

In dieser Ungleichung kommen nur noch die Rentenbarwerte und die Kommutationszahlen D' vor, so dass sich a leicht bestimmen lässt.

3. Beispiel

Wir betrachten eine Versicherung der Dauer n = 20, abgeschlossen im Alter x = 35. Die Konstante k wählen wir gleich 1,5 , α_t sei eine lineare Funktion der Zeit:

$$\alpha_t = 0{,}8 + 0{,}01 \cdot t.$$

Um a zu ermitteln, berechnen wir die beiden Seiten von Ungleichung (15) für verschiedene Werte von a. Dabei ergibt sich:

(EVK 60/A/31/2%)

	linke Seite	rechte Seite
a = 10	0,0765	0,0829
a = 11	0,0863	0,0707

Für a erhalten wir damit den Wert 10, für P_x 0,0902. Ungleichung (13) sieht in unserem Beispiel folgendermassen aus:

$$0{,}0823 < P_x < 0{,}0931.$$

4. Tarifprämie

Die Tarifprämie werde mit Grundlagen zweiter Ordnung berechnet. Die Abschlusskosten bemessen wir als Bruchteil $\bar{\alpha}$ der versicherten Anfangsleistung "1", die laufenden Kosten teilen wir in einen Bruchteil β der Tarifprämie und einen Bruchteil γ der jeweilen versicherten Leistung auf.
Um Π_x zu bestimmen, gehen wir aus von Gleichung (8) für die Nettoprämie, nach welcher

$P_x = \dfrac{M_x - M_{x+a} + (1+k)D'_{x+n}}{D'_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}$ ist. Aus dieser Gleichung ersehen wir, dass

der Barwert der versicherten Todes- und Erlebensfalleistungen gleich

$${}_{|a}A_x + (1+k)\cdot {}_nE'_x \text{ ist.}$$

Für den Barwert der Kosten $\bar{\alpha}$ und γ erhalten wir den Ausdruck:

$$\bar{\alpha} + \gamma \cdot (\ddot{a}'_{x:\overline{a}|} + \frac{D'_{x+a}}{D_x} \cdot (1+k)\ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|}).$$

Hierbei ist zu beachten, dass γ auch während der Zeitspanne von a bis n, in welcher keine Leistungen fällig werden, längstens aber bis zum Tode des Versicherten zu erheben ist.
Der Barwert der Gewinnanteile unter Abzug der Kosten β wird zu

$$\frac{(1-\beta)\Pi_x}{D_x} \cdot \sum_{t=o}^{n-1} \Delta_t \cdot D'_{x+t} \cdot$$

Schliesslich ergibt sich für den Barwert der Tarifprämien unter Abzug der Kosten β

$$(1-\beta)\Pi_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}|} ,$$

so dass sich Π_x zu

$$\Pi_x = \frac{M_x - M_{x+a} + (1+k)D'_{x+n} + \bar{\alpha} D_x + \gamma(D_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{a}|} + D'_{x+a} \cdot (1+k)\ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|})}{D_x \cdot (1-\beta)(\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{t=o}^{n-1} \Delta_t \cdot D'_{x+t})}$$

bestimmt. Setzen wir noch nach Zwinggi [6]

$\frac{1}{D_x} \cdot \sum_{t=o}^{n-1} \Delta_t \cdot D'_{x+t} = \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(\Delta)$ und damit $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(\Delta) = \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(1-\Delta)$, lässt sich (16) vereinfachen auf

$$II_x = \frac{M_x - M_{x+a} + (1+k)D'_{x+n} + \bar{\alpha} D_x + \gamma(D_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{a}|} + D'_{x+a} \cdot (1+k)\ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|})}{(1-\beta)\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(1-\Delta)D_x} .$$

II. Teil. Zwei Ausscheideursachen

1. Formel für die Nettoprämie

Die den Ausscheideursachen α und β entsprechenden Wahrscheinlichkeiten seien $*q^{(1)}_{x+t}$ und $*q^{(2)}_{x+t}$.

Wir teilen die Versicherungsdauer n in drei Teile, in die Intervalle von 0 bis a, von a bis b und von b bis n. Dabei sollen a und b derart festgelegt sein, dass für $t \geq a$ $\alpha_t \cdot {}_{t+1}V_x \geq 1$ und für $t \geq b$ $\beta_t \cdot {}_{t+1}V_x \geq 1$ ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, dass α_t stets grösser β_t und damit a kleiner b ist.

Dann gelten folgende Rekursionsformeln für das Deckungskapital:

Für $t < a$ gilt: $({}_tV_x + P_x)(1+i) - *q^{(1)}_{x+t} - *q^{(2)}_{x+t} -$

$$(1 - *q^{(1)}_{x+t} - *q^{(2)}_{x+t}) \cdot {}_{t+1}V_x = 0,$$

für $a \leq t < b$: $({}_tV_x + P_x)(1+i) - *q^{(1)}_{x+t} \cdot \alpha_t \cdot {}_{t+1}V_x - *q^{(2)}_{x+t} -$

$$(1 - *q^{(1)}_{x+t} - *q^{(2)}_{x+t}) \cdot {}_{t+1}V_x = 0 \qquad (17)$$

und für $t \geq b$: $({}_tV_x + P_x)(1+i) - *q^{(1)}_{x+t} \cdot \alpha_t \cdot {}_{t+1}V_x - *q^{(2)}_{x+t} \cdot \beta_t \cdot {}_{t+1}V_x -$

$$(1 - *q^{(1)}_{x+t} - *q^{(2)}_{x+t}) \cdot {}_{t+1}V_x = 0.$$

Setzen wir in (17) $*\bar{q}^{(1)}_{x+t} = (1 - \alpha_t) \cdot *q^{(1)}_{x+t}$, so wird die der neuen Wahrscheinlichkeit $*\bar{q}^{(1)}_{x+t}$ entsprechende Leistung nach Satz 3 (Kapitel C)

gleich null. Wir erhalten so die vereinfachte Rekursionsformel:

$$ {}_{t+1}V_x \cdot (1 - {}^*q^{(1)}_{x+t} - {}^*q^{(2)}_{x+t}) = ({}_tV_x + P_x)(1+i) - {}^*q^{(2)}_{x+t}. \qquad (19) $$

Lässt man hierin t nacheinander die Werte a, a+1,..., b-1 annehmen, multipliziert die $(\tau+1)$-te Gleichung jeweils mit $v^{\tau} \cdot {}_{\tau}\bar{p}_{x+a}$ $(\tau = 0,1,\ldots,b-a-1)$ und addiert, ergibt sich:

$$ {}_aV_x = v^{b-a} \cdot {}_{b-a}\bar{p}_{x+a} \cdot {}_bV_x + \frac{1}{l_{x+a}} \cdot \sum_{\tau=0}^{b-a-1} v^{\tau+1} \cdot \bar{l}_{x+a+\tau} \cdot {}^*q^{(2)}_{x+a+\tau} - $$

$$ P_x \cdot \bar{\ddot{a}}_{x+a:\overline{b-a}|}. \qquad (20) $$

Dabei bedeutet $\bar{p}_{x+t} = (1 - {}^*\bar{q}^{(1)}_{x+t} - {}^*q^{(2)}_{x+t})$ die neue totale Verbleibswahrscheinlichkeit und $\bar{l}_{x+t} = l_{x+a} \cdot {}_{t-a}\bar{p}_{x+a}$ die zugehörige Abfallsordnung; $\bar{\ddot{a}}_{x:\overline{t}|}$ ist nach dieser Ordnung zu berechnen.

Wir verfahren mit Gleichung (18) in ähnlicher Weise, dh. wir setzen ${}^*\bar{q}^{(1)}_{x+t} = (1 - \alpha_t) \cdot {}^*q^{(1)}_{x+t}$ und ${}^*\bar{q}^{(2)}_{x+t} = (1 - \beta_t) \cdot {}^*q^{(2)}_{x+t}$. Die diesen Wahrscheinlichkeiten entsprechenden Leistungen werden dann gleich null, und man gelangt zu der Gleichung:

$$ {}_{t+1}V_x \cdot (1 - {}^*\bar{q}^{(1)}_{x+t} - {}^*\bar{q}^{(2)}_{x+t}) = ({}_tV_x + P_x)(1+i), \qquad (21) $$

dh. unsere Versicherungsform geht in eine reine Erlebensfallversicherung über. Wendet man die Formel für das prospektive Deckungskapital der Erlebensfallversicherung an und setzt darin ${}_nV_x = 1+k$, folgt für ${}_bV_x$:

$$ {}_bV_x = (1+k)v^{n-b} \cdot {}_{n-b}p'_{x+b} - P_x \cdot \ddot{a}'_{x+b:\overline{n-b}|}, \qquad (22) $$

wobei $p'_{x+t} = (1 - {}^{*}\bar{q}^{(1)}_{x+t} - {}^{*}\bar{q}^{(2)}_{x+t})$ wiederum die totale Verbleibswahrscheinlichkeit bezeichnet, und $\ddot{a}'_{x:\overline{t}|}$ auf der Grundlage p'_{x+t} beruht. Setzen wir dieses Ergebnis in (20) ein, wird

$$
{}_{a}V_{x} = v^{b-a} \cdot {}_{b-a}\bar{p}_{x+a} \cdot \left[(1+k) v^{n-b} \cdot {}_{n-b}p'_{x+b} - P_x \cdot \ddot{a}'_{x+b:\overline{n-b}|} \right] +
$$

$$
\frac{1}{l_{x+a}} \cdot \sum_{\tau=0}^{b-a-1} v^{\tau+1} \cdot \bar{l}_{x+a+\tau} \cdot {}^{*}q^{(2)}_{x+a+\tau} - P_x \cdot \bar{\ddot{a}}_{x+a:\overline{b-a}|} \cdot \qquad (23)
$$

Gleichzeitig gilt die Formel für das retrospektive Deckungskapital:

$$
{}_{a}V_{x} = \frac{P_x \cdot (N_x - N_{x+a}) - (M_x - M_{x+a})}{D_{x+a}} \cdot \qquad (24)
$$

Wir definieren $\bar{M}^{(2)}_{x+a} - \bar{M}^{(2)}_{x+b} = \sum_{t=a}^{b-1} \bar{C}^{(2)}_{x+t} = \sum_{t=a}^{b-1} v^{x+t+1} \cdot \bar{l}_{x+t} \cdot {}^{*}q^{(2)}_{x+t}$.

Aus der Gleichsetzung (23) = (24) ergibt sich dann für die Prämie P_x die Bestimmungsgleichung:

$$
P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + \bar{M}^{(2)}_{x+a} - \bar{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k) v^{n-a} \cdot {}_{b-a}\bar{p}_{x+a} \cdot {}_{n-b}p'_{x+b} \cdot D_{x+a}}{N_x - N_{x+a} + D_{x+a} \cdot (\bar{\ddot{a}}_{x+a:\overline{b-a}|} + v^{b-a} \cdot {}_{b-a}\bar{p}_{x+a} \cdot \ddot{a}'_{x+b:\overline{n-b}|})} \cdot
$$

Wir setzen ${}_{t}\tilde{p}_{x} = {}_{t}p_{x}$ für alle $t \leq a$,

${}_{t}\tilde{p}_{x} = {}_{a}p_{x} \cdot {}_{t-a}\bar{p}_{x+a}$ für alle t im Intervall $a < t \leq b$ und

${}_{t}\tilde{p}_{x} = {}_{a}p_{x} \cdot {}_{b-a}\bar{p}_{x+a} \cdot {}_{t-b}p'_{x+b}$ für alle $t > b$ und entsprechend $\tilde{l}_{x+t} = l_x \cdot {}_{t}\tilde{p}_{x}$, (25)

$\tilde{D}_{x+t} = v^{x+t} \cdot \tilde{l}_{x+t}$ usw.. Dann folgt:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n}}{N_x - N_{x+a} + \tilde{D}_{x+a} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+a:\overline{n-a}|}} \tag{26a}$$

bzw.
$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n}}{\tilde{D}_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{b}|} + \tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}} \tag{26b}$$

bzw.
$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n}}{\tilde{D}_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}} \tag{26c}$$

In Gleichung (26) sind ausser P_x noch a und b unbekannt.

2. Kriterien für a und b

Unsere Ansatzpunkte sind die Definitionsungleichungen für a und b:

$$\alpha_{a-1} \cdot {}_aV_x < 1 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_a \cdot {}_{a+1}V_x \geq 1 \quad \text{und}$$
$$\beta_{b-1} \cdot {}_bV_x < 1 \quad \text{bzw.} \quad \beta_b \cdot {}_{b+1}V_x \geq 1.$$

Wir gehen wiederum von Gleichung (24) aus und lösen diese nach P_x auf:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + {}_aV_x \cdot D_{x+a}}{N_x - N_{x+a}} \tag{27}$$

Da nun $\alpha_{a-1} \cdot {}_aV_x < 1$ ist nach Voraussetzung, erhalten wir folgende Unchung:

..

$$P_x < \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a} / \alpha_{a-1}}{N_x - N_{x+a}} = P({}_{|a}A_x) + \frac{1}{\alpha_{a-1}} \cdot P({}_aE_x). \qquad (28)$$

Analog unserem Vorgehen im Fall einer Ausscheideursache ersetzen wir in (27) ${}_aV_x$ mit Hilfe der Rekursionsformel (19) durch ${}_{a+1}V_x$:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a} \cdot (v\bar{p}_{x+a} \cdot {}_{a+1}V_x + {}^*q^{(2)}_{x+a} \cdot v - P_x)}{N_x - N_{x+a}}$$

oder da $\alpha_a \cdot {}_{a+1}V_x \geq 1$ ist und $\bar{p}_{x+a} = p_{x+a} + \alpha_a \cdot {}^*q^{(1)}_{x+a}$,

$$P_x \geq \frac{\alpha_a \cdot (M_x - M_{x+a}) + vD_{x+a} \cdot (p_{x+a} + \alpha_a \cdot q_{x+a})}{\alpha_a \cdot (N_x - N_{x+a+1})} =$$

$$= \frac{\alpha_a \cdot (M_x - M_{x+a}) + D_{x+a+1} + \alpha_a \cdot C_{x+a}}{\alpha_a \cdot (N_x - N_{x+a+1})} = \frac{\alpha_a \cdot (M_x - M_{x+a+1}) + D_{x+a+1}}{\alpha_a \cdot (N_x - N_{x+a+1})}, \text{ dh.}$$

$P_x \geq P({}_{|a+1}A_x) + \frac{1}{\alpha_a} \cdot P({}_{a+1}E_x)$. Das ergibt mit (28) zusammen:

$$P({}_{|a+1}A_x) + \frac{1}{\alpha_a} \cdot P({}_{a+1}E_x) \leq P_x < P({}_{|a}A_x) + \frac{1}{\alpha_{a-1}} \cdot P({}_aE_x). \qquad (29)$$

Diese Ungleichung entspricht der Ungleichung (13) im Fall einer Ausscheideursache, nur muss man beachten, dass wir jetzt statt mit einer einzigen mit der totalen Ausscheidewahrscheinlichkeit $q_{x+t} = {}^*q^{(1)}_{x+t} + {}^*q^{(2)}_{x+t}$ zu rechnen haben.

Wir benötigen, um a und b ermitteln zu können, noch eine zweite Bestimmungsungleichung. Wir lösen Gleichung (22) nach P_x auf:

$$P_x = \frac{(1+k)v^{n-b} \cdot {}_{n-b}p'_{x+b} - {}_bV_x}{\ddot{a}'_{x+b:\overline{n-b}|}} = \frac{(1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b} \cdot {}_bV_x}{\tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}} .$$

Da $\beta_{b-1} \cdot {}_bV_x < 1$ ist, folgt: $P_x > \frac{(1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b} / \beta_{b-1}}{\tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}} =$ (30)

$$= (1+k)P({}_{n-b}\tilde{E}_{x+b}) - \frac{1}{\beta_{b-1} \cdot v^{n-b}} \cdot \tilde{P}(v^{n-b}).$$

Dabei soll $\tilde{P}(v^{n-b})$ die mittels $\tilde{p}$ berechnete Prämie einer Terme-fixe-Versicherung der Dauer n-b bedeuten.
(22) lässt sich ebenso gut für ${}_{b+1}V_x$ anschreiben:

${}_{b+1}V_x = (1+k)v^{n-b-1} \cdot {}_{n-b-1}p'_{x+b+1} - P_x \cdot \ddot{a}'_{x+b+1:\overline{n-b-1}|}$, woraus

$$P_x = \frac{(1+k)v^{n-b-1} \cdot {}_{n-b-1}p'_{x+b+1} - {}_{b+1}V_x}{\ddot{a}'_{x+b+1:\overline{n-b-1}|}} = \frac{(1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b+1} \cdot {}_{b+1}V_x}{\tilde{D}_{x+b+1} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b+1:\overline{n-b-1}|}}$$

wird.
Nun ist $\beta_b \cdot {}_{b+1}V_x \geq 1$ und damit $P_x \leq \frac{(1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b+1} / \beta_b}{\tilde{D}_{x+b+1} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b+1:\overline{n-b-1}|}} =$

$$= (1+k)P({}_{n-b-1}\tilde{E}_{x+b+1}) - \frac{1}{\beta_b \cdot v^{n-b-1}} \cdot \tilde{P}(v^{n-b-1}).$$

Mit (30) zusammen ergibt sich dann:

$$(1+k)P({}_{n-b}\tilde{E}_{x+b}) - \frac{1}{\beta_{b-1} \cdot v^{n-b}} \cdot \tilde{P}(v^{n-b}) < P_x \leq (1+k)P({}_{n-b-1}\tilde{E}_{x+b+1}) -$$

$$\frac{1}{\beta_b \cdot v^{n-b-1}} \cdot \tilde{P}(v^{n-b-1}). \qquad (31)$$

Diese Ungleichung lässt sich leicht interpretieren:
Das Deckungskapital muss im Zeitraum von t = b bzw. t = b+1 bis t = n von ${}_bV_x < 1/\beta_{b-1}$ bzw. von ${}_{b+1}V_x \geq 1/\beta_b$ auf ${}_nV_x = 1+k$ anwachsen, ohne dass in diesem Abschnitt Leistungen fällig werden (vgl. (21)). Das bedeutet, dass die Versicherten die Differenz zwischen der Prämie für eine Erlebensfallversicherung über die Summe 1+k und der Prämie, die sie zu zahlen hätten, um das Kapital K bzw. K' zum Ablaufstermin n bereitzustellen, aufbringen müssen. Dabei bezeichnet K bzw. K' das im Zeitpunkt b bzw. b+1 vorhandene, auf das Ende der Versicherung aufgezinste Deckungskapital, wobei gilt:

$$K < \frac{r^{n-b}}{\beta_{b-1}} \quad \text{bzw.} \quad K' \geq \frac{r^{n-b-1}}{\beta_b}.$$

Mit (29) und (31) besitzen wir zwei Ungleichungen, mit deren Hilfe man a und b bestimmen kann. Da sie aber eher zum Verständnis als zur tatsächlichen Ermittlung der Konstanten dienen, wollen wir noch zwei weitere Beziehungen herleiten.
Wir gehen aus von Ungleichung (29) und setzen dort für P_x den Wert von (26a) ein:

$$\frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n}}{N_x - N_{x+a} + \tilde{D}_{x+a} \cdot \tilde{a}_{x+a:\overline{n-a}|}} < \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a}/\alpha_{a-1}}{N_x - N_{x+a}}.$$ Dann folgt:

$$\frac{(M_x - M_{x+a} + D_{x+a}/\alpha_{a-1}) + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n} - \frac{D_{x+a}}{\alpha_{a-1}}}{M_x - M_{x+a} + D_{x+a}/\alpha_{a-1}} <$$

$$\frac{N_x - N_{x+a} + \tilde{D}_{x+a} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+a:\overline{n-a}|}}{N_x - N_{x+a}} \quad \text{und damit:}$$

$$\frac{\tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n} - D_{x+a} \,/\, \alpha_{a-1}}{\tilde{D}_{x+a} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+a:\overline{n-a}|}} < \frac{M_x - M_{x+a} + D_{x+a} \,/\, \alpha_{a-1}}{N_x - N_{x+a}} .$$

Formen wir die rechte Seite wieder um wie in (15), ergibt sich

$$\frac{\alpha_{a-1} \cdot (\tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b}) + \alpha_{a-1} \cdot (1+k)\tilde{D}_{x+n} - D_{x+a}}{\tilde{D}_{x+a} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+a:\overline{n-a}|}} < \qquad (32)$$

$$\frac{(1-\alpha_{a-1})D_{x+a} + \alpha_{a-1} \cdot D_x}{D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}} - \alpha_{a-1} \cdot d.$$

Um eine zweite Beziehung zwischen a und b abzuleiten, ersetzen wir in (30) P_x durch (26b):

$$\frac{(1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b} \,/\, \beta_{b-1}}{\tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}} < \frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n}}{\tilde{D}_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{b}|} + \tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}} .$$

Daraus folgt: $\dfrac{\tilde{D}_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{b}|} + \tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}}{\beta_{b-1} \cdot \tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}} \lesseqgtr$

$$\frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n}}{\beta_{b-1} \cdot (1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b}} \text{, je nachdem ob}$$

$\beta_{b-1} \cdot (1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b} \gtreqless 0$ ist.

Weiter erhalten wir:

$$\frac{\tilde{D}_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{b}|}}{\beta_{b-1} \cdot \tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}} + \frac{1}{\beta_{b-1}} \leq \frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + \tilde{D}_{x+b}}{\beta_{b-1} \cdot (1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b}} / \beta_{b-1} +$$

$$\frac{1}{\beta_{b-1}}, \text{ so dass schliesslich}$$

$$\frac{\beta_{b-1} \cdot (1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b}}{\tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}} < \frac{\beta_{b-1} \cdot (M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b}) + \tilde{D}_{x+b}}{\tilde{D}_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{b}|}} \qquad (33)$$

resultiert.

Aus (32) und (33) lassen sich a und b bestimmen: a und b sind die grössten ganzen Zahlen, für die diese beiden Ungleichungen erfüllt sind.

3. Tarifprämie

Wir gehen aus von der Gleichung (26c) für die Nettoprämie. Aus ihr liest man den Barwert der versicherten Leistungen zu

$$|a A_x + (1+k) \cdot {}_n\tilde{E}_x + {}_{b-a|}\tilde{A}^{(2)}_{a|x}$$

ab, wobei ${}_{b-a|}\tilde{A}^{(2)}_{a|x}$ den Ausdruck $(\tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b})/\tilde{D}_x$ ersetzen soll.

Für den Barwert der Kosten $\bar{\alpha}$ und δ erhalten wir:

$$\bar{\alpha} + \delta \left[\tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{b}|} + (1+k) \cdot \frac{\tilde{D}_{x+b}}{D_x} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|} \right].$$

Der Barwert der Gewinnanteile unter Abzug der Kosten β wird zu

$$\frac{(1-\bar{\beta})\Pi_x}{D_x} \cdot \sum_{t=o}^{n-1} \Delta_t \cdot \tilde{D}_{x+t} \cdot$$

Schliesslich ergibt sich für den Barwert der Tarifprämien unter Abzug der Kosten $\bar{\beta}$:

$$(1-\bar{\beta})\Pi_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|} \cdot$$

Nach dem Aequivalenzprinzip folgt damit für die Tarifprämie, wenn wir wiederum

$$\frac{1}{D_x} \cdot \sum_{t=o}^{n-1} \Delta_t \cdot \tilde{D}_{x+t} = \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}(\Delta) \text{ und somit } \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|} - \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}(\Delta) = \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}(1-\Delta) \text{ setzen,}$$

$$\Pi_x = \frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n} + \bar{\alpha} D_x + \gamma(D_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{b}|} + \tilde{D}_{x+b} \cdot (1+k)\tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|})}{(1-\bar{\beta})\tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}(1-\Delta)D_x}$$

E. ZUSAMMENFASSUNG

Wir wollen kurz die Ergebnisse unserer Untersuchungen zusammenstellen. Wir gingen aus von einer gemischten Versicherung der Dauer n über die Summe "1", wobei der Versicherte, der im Zeitpunkt n noch der Gemeinschaft angehört, das Kapital "1+k", $k>0$, erhalten soll.
Wir unterschieden zwei Fälle:

1. Es existiert nur eine Ausscheideursache α mit der entsprechenden Leistung "1" bzw. $\alpha_t \cdot {}_{t+1}V_x$, falls grösser 1.

Hier gelangten wir zu folgendem Ausdruck für die jährliche Nettoprämie:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + (1+k)D'_{x+n}}{D'_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \quad *).$$

Dabei bezeichnet a die Anzahl Jahre, während derer die Leistung beim Ausscheiden des Versicherten konstant gleich der Versicherungssumme "1" ist, und erfüllt das Kriterium:
a ist die grösste ganze Zahl, für die

$$\frac{\alpha_{a-1} \cdot (1+k)D'_{x+n} - D'_{x+a}}{D'_{x+a} \cdot \ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|}} < \frac{(1-\alpha_{a-1})D_{x+a} + \alpha_{a-1} \cdot D_x}{D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}} - \alpha_{a-1} \cdot d \text{ ist.}$$

Die Tarifprämie, berechnet mit Grundlagen zweiter Ordnung, wurde zu

$$\Pi_x = \frac{M_x - M_{x+a} + (1+k)D'_{x+n} + \bar{\alpha} D_x + \gamma (D_x \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{a}|} + D'_{x+a} \cdot (1+k)\ddot{a}'_{x+a:\overline{n-a}|})}{D_x \cdot (1-\beta)\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(1-\Delta)},$$

---

*) Die gestrichenen Grössen sind für $t > a$ mittels der neuen Wahrscheinlichkeit $\bar{q}_{x+t} = (1-\alpha_t)q_{x+t}$ zu bestimmen.

wobei $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}(1-\Delta) = \frac{1}{D_x} \cdot \left(\sum_{t=o}^{n-1} D'_{x+t} - \sum_{t=o}^{n-1} \Delta_t \cdot D'_{x+t} \right)$ ist.

2. Es sind zwei Ausscheideursachen α und β vorhanden mit den entsprechenden Leistungen "1" oder ${}_t\alpha_{t+1}V_x$ bzw. ${}_t\beta_{t+1}V_x$, falls grösser 1. Für die Nettoprämie erhielten wir hier:

$$P_x = \frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n}}{\tilde{D}_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}} \quad *),$$ wobei a und b derart definiert wurden, dass ${}_t\alpha_{t+1}V_x \geq 1$ für $t \geq a$ und ${}_t\beta_{t+1}V_x \geq 1$ für $t \geq b$; a und b sind die grössten ganzen Zahlen, welche den beiden Ungleichungen genügen:

$$\frac{\alpha_{a-1} \cdot (\tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n}) - D_{x+a}}{\tilde{D}_{x+a} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+a:\overline{n-a}|}} < \frac{(1-\alpha_{a-1})D_{x+a} + \alpha_{a-1} \cdot D_x}{D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{a}|}} - \alpha_{a-1} \cdot d$$

und $$\frac{\beta_{b-1} \cdot (1+k)\tilde{D}_{x+n} - \tilde{D}_{x+b}}{\tilde{D}_{x+b} \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|}} < \frac{\beta_{b-1} \cdot (M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b}) + \tilde{D}_{x+b}}{\tilde{D}_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{b}|}} .$$

Die jährliche Tarifprämie ergab sich zu:

$$\Pi_x = \frac{M_x - M_{x+a} + \tilde{M}^{(2)}_{x+a} - \tilde{M}^{(2)}_{x+b} + (1+k)\tilde{D}_{x+n} + \alpha D_x + \gamma (D_x \cdot \tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{b}|} + \tilde{D}_{x+b} \cdot (1+k)\tilde{\ddot{a}}_{x+b:\overline{n-b}|})}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\Delta)D_x} ,$$

---

*) Das Zeichen $\sim$ über den einzelnen Grössen soll darauf hinweisen, dass mit der neuen Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}$ zu rechnen ist. (Definition auf S. 21

wo $\tilde{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}(1-\Delta)$ analog wie unter 1. definiert ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. Lang: "Analysis of Net Premium Formulas for the Income Endowment Policy", Discussion, RAIA Bd. 32, 1943 (E. G. Fassel)

[2] E. G. Fassel: "Insurance for Face Amount or Reserve if Greater", RAIA Bd. 19, 1930

[3] F. P. Cantelli: 1. "Genesi e costruzione delle tavole di mutualità", Bollettino di Notizie sul Credito e sulla Previdenza, Roma 1914

2. "Sulle leggi di mutualità e sulle equazioni delle riserve matematiche", Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, Roma 1938

[4] W. Frauenfelder: "Studien zur Kapitalansammlungstheorie von F. P. Cantelli", Dissertation, Zürich 1951

[5] H. Schärf: "Ueber einige Variationsprobleme der Versicherungsmathematik", Mvsv Bd. 41, Heft 2

[6] E. Zwinggi: "Versicherungsmathematik", 2. Auflage, Basel 1958

LEBENSLAUF

Am 22. Juni 1943 wurde ich, Gertrud Maria Wirz, als Tochter des Rechtsanwaltes Paul Wirz und der Luise Wirz geb. Pauly in Kassel (Deutschland) geboren. Im Sommer 1946 zogen wir nach Schopfheim im Wiesental. Dort besuchte ich die Volksschule und ab 27. April 1954 das naturwissenschaftliche Gymnasium. Im Frühjahr 1963 bestand ich die Reifeprüfung und immatrikulierte mich anschliessend an der Universität Basel. 1966 liess ich mich für das Sommersemester beurlauben, um ein Praktikum in der Versicherungsgesellschaft La Bâloise Vie in Paris zu absolvieren.

Während meiner Studienzeit besuchte ich die Vorlesungen und Uebungen folgender Herren Professoren und Privatdozenten:

in Versicherungslehre: E. Zwinggi, M. Gürtler, P. Leepin, M. Grossmann und B. Romer;

in Mathematik: W. Habicht, R. Conzelmann und M. Eichler;

in Astronomie: W. Becker und U. Steinlin;

in Physik: P. Huber, K. Alder und P. Scherrer;

in Theologie: K. Barth + und H. Ott.

Allen meinen Professoren und Dozenten möchte ich meinen Dank aussprechen, insbesondere Herrn Prof. Dr. E. Zwinggi, unter dessen Anleitung die vorliegende Arbeit entstand.